

盲稀疏源信号分离算法的恢复性研究

谈华嵩, 刘海林

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 基于一种两步稀疏表示的方法, 利用随机框架讨论欠定盲源分离的恢复能力. 盲稀疏源信号分离算法一般假设源信号是充分稀疏的, 讨论了在源信号不充分稀疏的情况下欠定盲源分离的恢复能力的概率估计, 进一步刻画了源的稀疏性与恢复能力的关系, 揭示了利用两步法处理盲源分离问题的有效性.

关键词: 欠定混合; 盲源分离; 稀疏表示; 恢复能力

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2007)03-0028-04

对盲分离问题的研究至今已经取得了许多成果, 但是以往的研究多数是针对非欠定盲分离而言, 即观测器的个数大于源信号的个数, 因此在实际应用中有许多限制. 为此, 对于观测器个数少于源信号个数的欠定盲分离问题的研究, 目前已经是国际上盲信号处理领域中备受人们关注的、具有挑战性的问题. 在这种情况下, 观测信号的个数 n 少于源信号的个数 m . 相应的无噪盲信号分离模型为:

$$X = AS, \quad (1)$$

其中, 未知的混合矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 矩阵 $S = [s(1), \dots, s(k)] \in \mathbf{R}^{m \times K}$ 含有 m 个未知的源信号, 唯一可知的 $X = [x(1), \dots, x(k)] \in \mathbf{R}^{n \times K}$ 是观测信号, 其中 $n < m$.

对此问题的研究, 人们目前采用的通常方法是稀疏分解, 利用信号在时域和变换域中的稀疏特性进行盲信号分离. 如 Belouchrani^[1] 针对离散源信号提出的最大后验概率方法; Zibulevsky^[2] 提出的稀疏分解方法; Bofill^[3] 提出的频域稀疏表示方法; Girolami^[4] 提出的利用稀疏表示的变分期望最大化方法; Li^[5-6] 提出的先聚类然后利用最小 1-范数的方法等等. 以上方法所对应的算法都取得了较好的盲分离效果, 极大地推动了欠定盲信号分离的发展.

通常讲的稀疏信号, 就是说源信号在绝大多数时刻的采样点取值为零, 或者接近于零, 少数采样点取值明显远于零. 上面提到的方法都是针对源信号充分稀疏的情况下进行的, 即源信号中在同一个时刻只有一个源信号取值较大, 其它源信号取值为零, 或者接近于零. 不妨假设在时刻 t 只有源信号 $S_i(t)$ 取值非零, 其它源信号幅值都很小或为零, 此时 (1) 可

写为: $x(t) = a_i s_i(t)$, 由此可知 a_i 与第 t 时刻的观测信号 $x(t)$ 共线, 因此对 $x(t)$ 在所有时刻进行聚类, 即可得到混合矩阵的估计 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, 这就是目前将稀疏分量分析用于欠定盲分离方法之一的 K -均值聚类法^[7-3], 估计出混合矩阵 A 之后, 再借助如下的线性规划问题估计出源信号 $S(t)$:

$$\min \sum_{i=1}^m |s_i|,$$

$$\text{s.t. } As(j) = x(j),$$

$$\text{其中 } j = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

可见, 这些方法对稀疏信号的要求非常高, 在同一时刻只容许一个源信号起主导作用, 所以在应用中有一定的局限. 为此, Georgiev^[7] 提出了一种新的解决欠定盲源分离的方法, 该方法容许源信号在同一时刻有多个源信号起主导作用. 该定理首次从理论上阐明了稀疏分析的方法, 不仅仅只对充分稀疏的源信号可以进行分析, 而对不充分稀疏的信号仍然是有效的工具, 且给出了有效的不充分稀疏程度, 这是一个欠定稀疏盲分离的重要成果. 但是该方法并没有对源的恢复能力进行分析, 即没有讨论在怎样的情况下恢复出来的源以怎样的概率等于真正的源. 本文将根据 Georgiev 的最新理论, 并基于一种两步稀疏表示的方法, 利用随机框架来讨论欠定盲源分离的恢复能力.

1 基本原理

这里的盲源分离仍然是采用两步法, 第 1 步是估计混合矩阵; 第 2 步是通过处理线性规划问题 (2) 来估计源信号.

定理 1 若如下条件 1)~3) 成立, 则可恢复出

收稿日期: 2006-11-15

作者简介: 谈华嵩 (1980-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为信号与图像的处理.

源信号.

1) 混合矩阵 $A \in R^{n \times m}$, 它的任何 $n \times n$ 子矩阵都是非奇异矩阵.

2) 源信号的任何采样时刻 $s(t)$ 最多只有 n 个非零值.

3) 对任何包含 $m - n$ 个下标的集合 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{m-n}\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$, 在 S 中至少存在 n 个列向量, 使得它们的下标为 I 里面的集合元素的值为 0 而这 n 列个向量是线性独立的.

证明 用 ϕ 表示所有集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的包含 n 个元素的子集构成的集簇, 令 $J \in \phi$, 显然 ϕ 中有 C_m^n 个元素. 假设矩阵 A 的指标集为 J 的列所生成的超平面为 H_J , 下面证它也可以由 X 的一些列得到. 根据上面的条件 2) 和 3), 存在指标集 $\{t_k\}_{k=1}^n \subset \{1, 2, \dots, K\}$, 使得 $\{S(:, t_k)\}_{k=1}^n$ 中的任意 n 个列向量可以生成 R^m 中的 n 维子空间, 这些列向量在指标为 $\{1, 2, \dots, m\} \setminus J$ 处取零值. 根据混合模型可得向量 $v_k = \sum_{j \in J} S(j, t_k) a_j, k = 1, 2, \dots, n$ 属于数据矩阵 X . 而由条件 1) 向量集 $\{v_k\}_{k=1}^n$ 中的任意 n 个向量都是线性独立的, 这就意味着它们可以展成与 H_J 相同的超平面. 这样, 就可以对 X 的列进行唯一的聚类, 聚成 C_m^n 个类 Γ_k , 使得每一个类 Γ_k 最少包含 m 个元素, 且他们对于任意 $J_k \in \phi$ 都展成一个超平面 $H_{J_k}, k = 1, 2, \dots, C_m^n$. 然后再对这些超平面进行最小类数的聚类, 使得每一个类中的所有超平面的交是一个一维的子空间, 显然这样的一维子空间包含混合矩阵的一个列, 而且类数就是 m , 每个类都包含有 C_m^{n-1} 个超平面.

当混合矩阵 A 的估计正确或者充分精确, 就可以讨论源信号的恢复能力问题了, 即讨论解在怎样的情况下以怎样的概率等于真实的源向量.

考虑如下最优化问题:

$$\min \sum_{i=1}^m |s_i|,$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } x^* &= A^j s^j = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}) (s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_n})^T, \\ |A^j| &\neq 0 \\ s_i &= 0, i \neq j_1, j_2, \dots, j_n, \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $A \in R^{n \times m}, s \in R^n, n < m, \|s^*\|_0 = l < n$ (即 s^* 的非零值的数目为 l), $x^* = A s^*$. 用 s_1 表示最优化问题 (3) 的解, 注意 s^* 可以看作是源矩阵 $S \in R^{m \times K}$ 的一个列, 可以把 s^* 作为真实的源向量, s_1 作为恢复出来的源向量.

对于最优化问题 (3), 用 G 来表示 s^* 的非零值的指标集, 即 $G = \{i_1, i_2, \dots, i_l | s_{i_j}^* \neq 0, j = 1, 2, \dots, l\}$, 用 F 表示由 G 的所有非空子集组成的集簇, 显然 F 里有 $2^l - 1$ 个集合. 下面, 给出一个关于 s^* 的恢复能力的充要条件.

定理 2 1) $s^* = s_1 \Leftrightarrow \forall I \in F$, 最优化问题 (4) 可解, 且其最优值小于 $\frac{1}{2}$.

$$\max \sum_{k \in I} |\delta_k|;$$

$$\text{s.t. } A \delta = 0, \|\delta\|_1 = 1, \quad (4)$$

当 $k \in I$ 时, $\delta_k s_k^* > 0$ 当 $k \in G \setminus I$ 时, $\delta_k s_k^* \leq 0$

2) 特别地, 若 $\|s^*\|_0 = 1$ 则 $s^* = s_1$

证明 1) 证明过程与文献 [6] 中相同, 本文从略.

2) 若 $\|s^*\|_0 = 1$ 不妨设 $s^* = (s_0, 0, \dots, 0)^T$

$$\text{则 } x^* = A s^* = (a_1, a_2, \dots, a_m) (a_0, 0, \dots, 0)^T = a_1 s_0$$

$$\text{对于 } x^* = A^j s^j = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}) (s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_n})^T,$$

$$\text{则有 } a_1 s_0 = a_{j_1} s_{j_1} + a_{j_2} s_{j_2} + \dots + a_{j_n} s_{j_n}. \quad (5)$$

下面令 $T = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ 并分两种情况讨论:

(1) 若 $1 \in T$ 时, 不妨设 $j_1 = 1$, 则 (5) 式变为 $a_1 s_0 = a_1 s_1 + a_{j_2} s_{j_2} + \dots + a_{j_n} s_{j_n}$,

即 $a_1 (s_0 - s_1) + a_{j_2} s_{j_2} + \dots + a_{j_n} s_{j_n}$, 而 $|A^j| \neq 0$ 即 $a_1, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ 线性无关

所以 $s_0 - s_1 = s_{j_2} = \dots = s_{j_n} = 0$ 即最优化问题 (3) 的解为 $s_1 = s^*$

(2) 若 $1 \notin T$ 时, 由于矩阵 A 的每个列都是单位向量, 所以由 (5) 式可得

$$|s_{j_1}| + |s_{j_2}| + \dots + |s_{j_n}| = \|a_{j_1} s_{j_1}\|_2 + \|a_{j_2} s_{j_2}\|_2 + \dots + \|a_{j_n} s_{j_n}\|_2 \geq \|a_{j_1} s_{j_1} + a_{j_2} s_{j_2} + \dots + a_{j_n} s_{j_n}\|_2 = \|a_1 s_0\|_2 = |s_0|$$

等号当且仅当 $a_{j_1} s_{j_1} = k_1 a_{j_2} s_{j_2} = \dots = k_{n-1} a_{j_n} s_{j_n}$ 时成立, 而 $|A^j| \neq 0$ 即 $a_1, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ 线性无关, 所以 $1 \notin T$ 时, 即 $\forall \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \{2, 3, \dots, m\}$, 都有 $|s_{j_1}| + |s_{j_2}| + \dots + |s_{j_n}| > |s_0|$

综合以上两种情况可知, 当 $\|s^*\|_0 = 1$ 时, $s_1 = s^*$.

从上面的定理 2 可以看出, 对于给定的混合矩阵 A , 一个源列向量 s^* 的恢复能力不依赖于它的值的大小, 而依赖于它的非零值的指标集以及符号.

定义条件概率 $P(n, m, l) = P(s^* =$

$s_1 \|s^*\|_0 = l < n$), 根据上面的定理 2 可以得到文献 [6].

(1) n 和 m 固定, 若 $l_1 < l_2$ 则 $P(n, m, l_1) > P(n, m, l_2)$.

这说明 l 越小, 即源向量越稀疏时, 源越有可能被恢复出来.

(2) n 和 l 固定, 若 $m_1 < m_2$ 则 $P(n, m_1, l) > P(n, m_2, l)$.

这说明 m 越大, 即源的数量越多时, 源越难被恢复出来.

(3) m 和 l 固定, 若 $n_1 < n_2$, 则 $P(n_1, m, l) < P(n_2, m, l)$.

这说明 n 越大, 即传感器的数目越多时, 源越有可能被恢复出来.

2 恢复能力的概率估计

在假设混合矩阵已知的情况下, 推导利用 Georgiev 提出的盲源分离方法来估计源向量时的恢复能力的概率.

首先, 定义几个指标集. 令 $G_0 = \{1, 2, \dots, m\}$, 并用 G 表示源向量 s^* 的非零值的指标集. 显然对于基数 j 来说 G_0 有 $C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ 个子集, 记这些子集为 G_k^j , $k = 1, 2, \dots, C_m^j$, 即 C_k^j 表示非零值数目为 j 时的第 k 个指标子集.

对于已知的混合矩阵, 下面分 3 种情况来讨论恢复能力的概率.

1) 源向量 s^* 的非零值的数目已知.

考察条件概率 $p_j = P(s^* = s_1 \|s^*\|_0 = j)$, 其中 $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

从定理 1 可以看出 $p_0 = p_1 = 1$ 而根据最优化问题 (4), s_1 最多有 n 个非零值, 即当 $n < k \leq m$ 时 s^* 不可能等于 s_1 所以当 $j = n+1, \dots, m$ 时有 $p_j = 0$.

假设 s^* 有 $j(2 \leq j \leq n)$ 个非零值, 定义一个符号列向量 $t \in \mathbb{R}^m$, $t_k = \text{sign}(s_k^*)$, $k = 1, 2, \dots, m$, 注意若 $s_k^* = 0$ 则 $t_k = 0$. 由定理 1 知道, 一个源列向量 s^* 的恢复能力仅与它的非零值的指标集以及符号有关, 而与它的非零值的大小无关, 这样 s^* 的恢复能力等价于 t 的恢复能力. 对于一个给定的指标集 G_k^j 及其中的一个符号列向量 t 若对于 G_k^j 的任意一个非空子集 I 最优化问题 (4) 的最优值都小于 $\frac{1}{2}$, 那么通过处理最优化问题 (3), 向量 t 就可以被恢复出来.

注意在 G_k^j 中有 2^j 个符号列向量, 假设其中有

q_k^j 个能被恢复出来, 那么通过处理最优化问题 (3), 一个非零值的指标集为 G_k^j 的源向量 s^* 能够恢复出来的概率即为 $\frac{q_k^j}{2^j}$, 而且 $p_j = \sum_{k=1}^{C_m^j} \frac{q_k^j}{2^j} \frac{1}{C_m^j} = \frac{1}{2^j C_m^j} \sum_{k=1}^{C_m^j} q_k^j$, 其中 $j = 2, \dots, n$.

2) 源向量 s^* 的非零值的数目未知, 而已知源向量每个值等于 0 的概率已知.

$\forall s^* \in \mathbb{R}^m$, 假设 $P(s_k^* = 0) = \alpha$, $P(s_k^* \neq 0) = 1 - \alpha$, $k = 1, 2, \dots, m$.

易见 s^* 有 j 个非零值的概率为 $C_m^j (1 - \alpha)^j \alpha^{(m-j)}$, 所以有

$P(s^* = s_1) = P(s^* = s_1 \|s^*\|_0 = j) P(\|s^*\|_0 = j) =$

$$\sum_{j=0}^m C_m^j (1 - \alpha)^j \alpha^{(m-j)} p_j$$

其中 $p_j = P(s^* = s_1 \|s^*\|_0 = j)$.

3) 源向量 s^* 的所有值都取自同一个拉普拉斯分布.

假设源向量 s^* 的所有值都取自同一个概率密度函数为 $\frac{1}{2} \exp(-|x|)$ 的拉普拉斯分布, 这就意味着 s^* 一般有 m 个非零值.

利用 s^* 定义一个列向量 $u^* \in \mathbb{R}^m$: 若 $|s_k^*| < \varepsilon_0$, 则 $u_k^* = 0$; 若 $|s_k^*| \geq \varepsilon_0$, 则 $u_k^* = s_k^*$, 其中 ε_0 是一个很小的正常数. 考虑最优化问题 (3), 用 $y^* = Au^*$ 替换 x^* , 并记其最优 l^1 范数解为 u_1 , 相应地对于 s^* 的最优化问题 (3) 的最优 l^1 范数解记为 s_1 .

根据 l^1 范数解的稳定性分析 [5], 对于一个给定的很小的正常数 β , 若 ε_0 充分小, 那么 $\|s_1 - u_1\|_2 < \beta$, 即 $s_1 \approx u_1$. 这样如果 s^* 的一个值 s_k^* 满足 $|s_k^*| < \varepsilon_0$, 那么它就可以看作一个零值. 而且 $\|s^* - s_1\|_2 \leq \|s^* - u^*\|_2 + \|u^* - u_1\|_2 + \|u_1 - s_1\|_2 \leq \sqrt{m} \varepsilon_0 + \beta + \|u^* - u_1\|_2$.

注意到 ε_0 和 β 都很小, 那么如果 $u^* = u_1$, 就能说 $s^* \approx s_1$ 所以

$\text{pro}(l) = P(\|s^* - s_1\|_2 \leq \beta_0) \approx P(u^* = u_1)$, 其中 $\beta_0 = \sqrt{m} \varepsilon_0 + \beta$.

注意: 因为源向量 s^* 的所有值都取自同一个拉普拉斯分布, 所以这些值都很小但是一般都不等于零. 从最优化问题 (3) 可以看出, s_1 最多有 n 个非零值, 这样等式 $s^* = s_1$ 一般根本不成立, 然而 $\|s^* - s_1\|_2$ 可以比较小. 这样, 如果 $\|s^* - s_1\|_2 \leq \beta_0$, 就可以说 s^*

能够被恢复出来了.

由于 $\mathbf{s}^*$ 的所有值都取自同一个拉普拉斯分布, 易见 $P(|s_k^*| < \varepsilon_0) = 1 - \exp(-1/\varepsilon_0)$, 记之为 α_l . 那么 $\mathbf{s}^*$ 中有 j 个值比 ε_0 大的概率为 $C_m^j (1 - \alpha_l)^j \alpha_l^{(m-j)}$, 即 $P(\|\mathbf{u}^*\|_0 = j) = C_m^j (1 - \alpha_l)^j \alpha_l^{(m-j)}$. 这样

$$\begin{aligned} \text{pro}(l) &\approx P(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_1) = \\ P(\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 \mid \|\mathbf{u}^*\|_0 = j) &P(\|\mathbf{u}^*\|_0 = j) = \\ \sum_{j=0}^m C_m^j (1 - \alpha_l)^j \alpha_l^{(m-j)} &p_j \end{aligned}$$

3 结论

本文通过对利用基于 Georgiev 提出的盲源分离方法来恢复源信号进行分析, 从而得到源的恢复能力的概率估计, 这对更好地处理盲源分离问题提供了有用的帮助. 例如, 如果知道源的概率分布, 那么就可以估计出恢复能力的概率, 并且可以决定恢复出来的源是否可以接受; 如果知道源的数目, 就可以估计出传感器最低的数量, 才能使得源能够以较高的概率被恢复出来.

参考文献:

[1] BELOUCHRANIA, CARDOSO J F. Maximum likelihood source separation for discrete sources[C]. In Proc EUSIPCO, 1994: 768-771

[2] ZBULEVSKY M, PEARLMUTTER B A, BOFILL P, et al. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary[M]// Roberts S J, Everson R M. Independent Components Analysis: Principles and Practice. UK: Cambridge University Press, 2000

[3] BOFILL P, ZBULEVSKY M. Underdetermined source separation using sparse representation[J]. Signal Processing, 2001, 81: 2353-2362

[4] GROLAND IM. A variational method for learning sparse and overcomplete representations [J]. Neural Computation, 2001, 13(11): 2517-1532

[5] LIY Q, CICHOCKI A, AMARIS. Analysis of Sparse representation and blind source separation[J]. Neural Computation, 2004, 16: 1193-1234

[6] LIY Q, CICHOCKI A, AMARIS. Underdetermined blind source separation based on sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54 (2): 423-437.

[7] GEORGEV Pando, THEIS Fabian, CICHOCKI Andrzej. Sparse component analysis and blind separation of underdetermined mixtures [J]. IEEE Transactions of Neural Networks, 2005, 16(4): 992-996

On Recoverability of Blind Source Separation
Based on Sparse Representation

TAN Hua-hao, LIU Haolin

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract This paper discusses the recoverability of underdetermined blind source separation (BSS), based on a two-stage sparse representation approach. Within the stochastic framework blind source separation it is usually predicted that source signals are sufficiently sparse. This paper estimates recoverability probability when source signals are not sufficiently sparse, which not only reflects the relationship between the recoverability and sparseness of sources but also indicates the effectiveness of the two-stage sparse representation approach to solving BSS.

Key words underdetermined mixture; blind source separation; sparse representation; recoverability